13 Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

13.1 Extremwerte bei zwei unabhängigen Variablen

1. $z'_x = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 48 = 0$; $z'_y = 3x^2 + 6xy = 0$;

$z'_x - z'_y \Rightarrow 3y^2 - 48 = 0 \Rightarrow y_1 = 4,\ y_2 = -4$

$y_1 = 4 \Rightarrow x(x+8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -8$

$y_2 = -4 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow x_3 = 0,\ x_4 = 8$

x	y	z''_{xx} $=6x+6y$	z''_{yy} $=6x$	$z''_{xx}z''_{yy}$		$(z''_{xy})^2$	z''_{xy} $=6x+6y$	
0	4	24	0	0	$<$	24^2	24	
-8	4	-24	-48	$(-24)\cdot(-48)$	$>$	24^2	-24	Max.
0	-4	-24	0	0	$<$	24^2	-24	
8	-4	$+24$	$+48$	$24\cdot 48$	$>$	24^2	24	Min.

2. $z'_x = 4xy + 2y^2 + 2y = 0$; $z'_y = 2x^2 + 4xy + 2x + 2y^2 + 2y - 4 = 0$

$z'_y - z'_x = 2x^2 + 2x - 4 = 0$

$x_1 = 1$; $\quad x_2 = -2$

$x_1 = 1:\ 4y + 2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y_1 = 0$ und $y_2 = -3$

$x_2 = -2:\ -8y + 2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y_3 = 0$ und $y_4 = 3$

$z''_{xx} = 4y$; $\quad z''_{xy} = 4x + 4y + 2 = z''_{yy}$

(x,y)	z''_{xx}	z''_{yy}	$z''_{xx}z''_{yy}$		$(z''_{xy})^2$	
$(1,0)$	0	6	0	$<$	36	Sattelpunkt
$(-2,0)$	0	-6	0	$<$	36	Sattelpunkt
$(-2,3)$	12	6	72	$>$	36	Minimum
$(1,-3)$	-12	-6	72	$>$	36	Maximum

3. $G'_{x_1} = 14 - 2x_1 + x_2$; $G'_{x_2} = 28 - 4x_2 + x_1$

Aus $G'_{x_1} = G'_{x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -28 + 4x_2 & x_2 = 10 \\ 2x_1 = 14 + x_2 & x_1 = 12 \end{cases}$

$G''_{x_1x_1} = -2$; $G''_{x_1x_2} = G''_{x_2x_1} = 1$; $G''_{x_2x_2} = -4$.

Aus $G''_{x_1x_1} G''_{x_2x_2} = (-2)(-4) > \left(G''_{x_1x_2}\right)^2 = 1$; $G''_{x_1x_1} = -2 < 0$ folgt:

Bei $(x_1, x_2) = (12, 10)$ liegt ein Maximum.

4. $z'_x = 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = +\sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$

$z'_y = 6 + 2y = 0 \Rightarrow y = -3$

$z''_{xx} = 12x^2 - 8$; $z''_{yy} = 2$; $z''_{xy} = 0$

$(0, -3)$: $z''_{xx} z''_{yy} = -16 < 0 = {z''_{xy}}^2 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(\sqrt{2}, -3)$: $z''_{xx} z''_{yy} = 32 > 0 = {z''_{xy}}^2 \Rightarrow$ Minimum

$(-\sqrt{2}, -3)$: $z''_{xx} z''_{yy} = 32 > 0 = {z''_{xy}}^2 \Rightarrow$ Minimum.

5. Die richtigen Folgerungen sind:

A: Maximum

B: Keine sichere Aussage möglich

C: Widerspruch

D: Kein Extremwert

E: Minimum.

6. $z'_x = 3x^2 - 27 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$; $z'_y = 2y - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y = 2$

(x, y)	z''_{xx} $= 6x$	z''_{yy} $= 2$	$z''_{xx} z''_{yy}$	$<$ $=$ $>$	$\left(z''_{xy}\right)^2$	z''_{xy} $= 0$
$(3, 2)$	18	2	36	$>$	0	0
$(-3, 2)$	-18	2	-36	$<$	0	0

Bei $(-3, 2)$ existiert kein Extremwert (Sattelpunkt).

Bei $(3, 2)$ existiert ein Minimum.

13.2 Extremwerte unter Nebenbedingungen

1. **a)** $z_L = x^2 + 2xy + \lambda(-1{,}5x - y + 6)$

$$\frac{\partial z_L}{\partial y} = 2x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial z_L}{\partial x} = 2x + 2y - 1{,}5\lambda = 0 \Rightarrow y = 0{,}25\lambda$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = -1{,}5x - y + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow x = 3,\ y = 1{,}5$$

b) $z = x^2 + 2x(-1{,}5x + 6) = -2x^2 + 12x$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -4x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1{,}5$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = -4 < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } (3; 1{,}5)\ .$$

2. $f(x, y, \lambda) = 3xy + \lambda\left(18 - x^2 - y^2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 3y - 2\lambda x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}\lambda x \\ f'_y = 3x - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3x}{2\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^2 = \tfrac{9}{4} \Rightarrow y^2 = x^2$$

$f'_\lambda = 18 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$; $x_{1,2} = \pm 3$; $y_1 = x$; $y_2 = -x$;

$y = \pm 3$

$(3, 3)$; $(3, -3)$; $(-3, 3)$; $(-3, -3)$.

3. $f_L = x^2y^2z^2 + \lambda(18 - 2x - 2y - 2z)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_L}{\partial x} = 2xy^2z^2 - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial f_L}{\partial y} = 2yx^2z^2 - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial f_L}{\partial z} = 2zx^2y^2 - 2\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial \lambda} = 18 - 2x - 2y - 2z = 0 \Rightarrow x = y = z = 3$$

Ergebnis: $x = y = z = 3$, $\lambda = 243$

Bedeutung des Multiplikators: Wird das absolute Glied der Nebenbedingung um 1 Einheit geändert, so ändert sich der optimale Funktionswert um $\lambda = 243$.

4. $y = xy + 3x \Rightarrow xy - y = -3x$
$z = 4x^3 - 3x + 2$
$z' = 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 0{,}25 \; ; \; x_1 = -0{,}5 \; ; \; x_2 = 0{,}5$
$z'' = 24x \; ; \; z''(0{,}5) = 12 > 0 \; ; \; z''(-0{,}5) = -12 < 0$
Minimum bei $(0{,}5; 3)$; Maximum bei $(-0{,}5; -1)$.

13.3 Ökonomische Anwendungen

1. $K_L = 4r_1 + 12r_2 + \lambda\left(80 - 20r_1^{0,25}r_2^{0,75}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial r_1} &= 4 - \lambda 5 r_1^{-0,75} r_2^{0,75} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{4r_1^{0,75}}{5r_2^{0,75}} \\ \frac{\partial K}{\partial r_2} &= 12 - \lambda 15 r_1^{0,25} r_2^{-0,25} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{12r_2^{0,25}}{15r_1^{0,25}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 80 - 20r_1^{0,25}r_2^{0,75} = 0 \Rightarrow 80 - 20r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 4 = r_2$$

2. a) Minimiere $O = a^2 + 4ah$ (Zielfunktion) unter der Bedingung $V = a^2h = 4$ (Nebenbedingung)
   I. Einsetzungsverfahren (Substitution)
   II. Lagrangesche Multiplikatoren-Methode

   b) Lösung mit Hilfe von I:
   $O = a^2 + \frac{16}{a} \; ; \; O' = 2a - \frac{16}{a^2} \Rightarrow a = 2 \; ; \; O''(2) > 0 \Rightarrow$ Minimum
   $h = \frac{4}{a^2} = 1$
   Lösung: $a_{\min} = 2m \quad h_{\min} = 1m \; (O_{\min} = 12m^2$ bei $V = 4m^3)$.
   Der Blechverbrauch ist minimal, wenn die Höhe der Container halb so groß wie die Kantenlänge ist.

4. $y = xy + 3x \Rightarrow xy - y = -3x$
$z = 4x^3 - 3x + 2$
$z' = 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 0{,}25$; $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 0{,}5$
$z'' = 24x$; $z''(0{,}5) = 12 > 0$; $z''(-0{,}5) = -12 < 0$
Minimum bei $(0{,}5; 3)$; Maximum bei $(-0{,}5; -1)$.

13.3 Ökonomische Anwendungen

1. $K_L = 4r_1 + 12r_2 + \lambda\left(80 - 20r_1^{0,25}r_2^{0,75}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial K}{\partial r_1} = 4 - \lambda 5 r_1^{-0,75} r_2^{0,75} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \dfrac{4r_1^{0,75}}{5r_2^{0,75}} \\[2ex] \dfrac{\partial K}{\partial r_2} = 12 - \lambda 15 r_1^{0,25} r_2^{-0,25} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{12r_2^{0,25}}{15r_1^{0,25}} \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 80 - 20r_1^{0,25}r_2^{0,75} = 0 \Rightarrow 80 - 20r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 4 = r_2$$

2. a) Minimiere $O = a^2 + 4ah$ (Zielfunktion) unter der Bedingung $V = a^2h = 4$ (Nebenbedingung)
I. Einsetzungsverfahren (Substitution)
II. Lagrangesche Multiplikatoren-Methode
b) Lösung mit Hilfe von I:
$O = a^2 + \dfrac{16}{a}$; $O' = 2a - \dfrac{16}{a^2} \Rightarrow a = 2$; $O''(2) > 0 \Rightarrow$ Minimum
$h = \frac{4}{a^2} = 1$
Lösung: $a_{\min} = 2m \quad h_{\min} = 1m$ ($O_{\min} = 12m^2$ bei $V = 4m^3$) .
Der Blechverbrauch ist minimal, wenn die Höhe der Container halb so groß wie die Kantenlänge ist.

3. $K_L = 6r_1 + 12r_2 + \lambda\left(80 - 5r_1^2 r_2\right)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K_L}{\partial r_1} &= 6 - 10\lambda r_1 r_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{10 r_1 r_2} \\ \frac{\partial K_L}{\partial r_2} &= 12 - 5\lambda r_1^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{5r_1^2} \end{aligned}\right\} r_1 = 4r_2$$

$$\frac{\partial K_L}{\partial \lambda} = 80 - 5r_1^2 r_2 = 0 \Rightarrow 80 - 80r_2^3 = 0 \Rightarrow r_2 = 1$$

$r_1 = 4,\ r_2 = 1,\ \lambda = 0{,}15$

Minimalkombination bei $(4, 1)$

Kosten ändern sich um $\lambda = 0{,}15$.

4. Die Eckpunkte des Rechtecks müssen auf dem Kreis liegen. Die Diagonalen des Rechtecks gehen dann durch den Kreismittelpunkt. Ist x die Länge und y die Breite des Rechtecks, so gilt

$F = xy\ ;\ x^2 + y^2 = 4r^2$

$F_L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4r^2)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_L}{\partial x} &= y + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial F_L}{\partial y} &= x + 2y\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

$2x^2 = 4r^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}r = y$.

5. $K_L = 3r_1 + 12r_2 + \lambda\left(100 - 20r_1^{0,2} r_2^{0,8}\right)$

$$\frac{\partial K_L}{\partial r_1} = 3 - \lambda 4 r_1^{-0,8} r_2^{0,8} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3r_1^{0,8}}{4r_2^{0,8}}$$

$$\frac{\partial K_L}{\partial r_2} = 12 - \lambda 16 r_1^{0,2} r_2^{-0,2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{12 r_2^{0,2}}{16 r_1^{0,2}}$$

$$\frac{3r_1^{0,8}}{4r_2^{0,8}} = \frac{12r_2^{0,2}}{16r_1^{0,2}} \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$\frac{\partial K_L}{\partial \lambda} = 100 - 20r_1^{0,2} r_2^{0,8} = 0 \Rightarrow 100 - 20r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 5 = r_2\ .$$

6. $G^\star = 120\sqrt{x_1} + 160\sqrt{x_2} + \lambda\,(4.000.000 - x_1 - x_2)$

$\frac{\partial G^\star}{\partial x_1} = \frac{60}{\sqrt{x_1}} - \lambda\,;\ \frac{\partial G^\star}{\partial x_2} = \frac{80}{\sqrt{x_2}} - \lambda\,;\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 4.000.000 - x_1 - x_2$

Nach Nullsetzen der Ableitungen und Auflösung der Gleichung folgt: $x_2 = \frac{16}{9}x_1$ bzw. $x_1 = 1.440.000$ und $x_2 = 2.560.000$ sowie $\lambda = 0{,}05$. Der zusätzliche Gewinn bei Einsatz einer zusätzlichen EUR Kapital wird durch λ angegeben und beträgt 0,05 EUR.

7. $y_L = 9x - a - 4b + \lambda\left(x - 10 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$\frac{\partial y_L}{\partial x} = 9+\lambda,\ \frac{\partial y_L}{\partial a} = -1-\frac{\lambda}{a^2},\ \frac{\partial y_L}{\partial b} = -4-\frac{\lambda}{b^2},\ \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} = x-10+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

durch Nullsetzen folgt: $\lambda = -9$

$\Rightarrow -1 + \frac{9}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

und $-4 + \frac{9}{b^2} = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$ und $x = 9$.

8. a) $K_L = 2r_1 + 8r_2 + \lambda\left(40 - 5r_1^{0,5}r_2^{0,5}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial K_L}{\partial r_1} = 2 - 5\lambda 0{,}5 r_1^{-0,5}r_2^{0,5} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4r_1^{0,5}}{5r_2^{0,5}}\\[2ex] \frac{\partial K_L}{\partial r_2} = 8 - 5\lambda 0{,}5 r_1^{0,5}r_2^{-0,5} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{16r_2^{0,5}}{5r_1^{0,5}}\end{array}\right\} \Rightarrow r_1 = 4r_2$$

$\frac{\partial K_L}{\partial \lambda} = 40 - 5r_1^{0,5}r_2^{0,5} = 0 \Rightarrow 5\cdot 2r_2 = 40 \Rightarrow r_2 = 4\,;\ r_1 = 16$

$\lambda = 1{,}6$;

b) $\frac{\mathrm{d}K_L}{\mathrm{d}x} = \lambda = 1{,}6$;

c) Isoquante und Isokostengerade haben an der Stelle der Minimalkostenkombination einen Berührungspunkt.

9. a) $G = 6k + 2gk \quad 4k + g = 37$

$G_L = 6k + 2gk + \lambda(37 - 4k - g)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial G_L}{\partial k} = 6 + 2g - 4\lambda = 0\\[2ex] \frac{\partial G_L}{\partial g} = 2k - \lambda = 0\end{array}\right\} \Rightarrow g = 4k - 3$$

$\Rightarrow k = 5\,;\ g = 17\,;\ \lambda = 10$

$\frac{\partial G_L}{\partial \lambda} = 37 - 4k - g = 0$;

b) Um $\lambda = 10$.